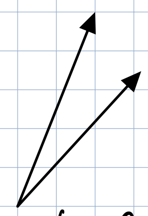
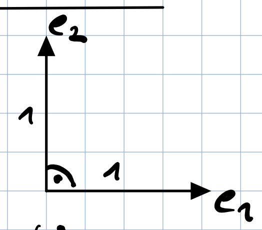
Orthonormalbasen und Gram-Schmidt (5.4)





Def. 5.4.1: Vektoren $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^m$ heissen orthonormal, wenn sie paarweise orthogonal sind und Länge 1 haben. Das heisst

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$$

δ_{ij}: Kronecker Delta

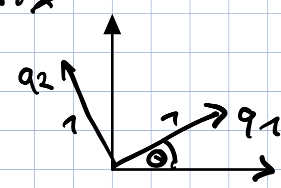
- Falls Q eine Matrix mit Spalten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ist: die Vektoren sind orthonormal gdw. $Q^T Q = I$ ($q_i^T q_j$ ist der Eintrag von $Q^T Q$ in Zeile i, Spalte j)
- Q ist nicht unbedingt quadratisch, und $Q Q^T = I$ gilt nicht unbedingt. (Beispiel: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)
- Beispiel für orthonormale Vektoren: Standard-Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^m$).

Def. 5.4.3: Eine quadratische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

heisst orthogonal, wenn $Q^TQ = I$. In diesem Fall gilt auch $QQ^T = I$ (Übungsaufgabe 3.12). Äquivalent: $Q^{-1} = Q^T$. Die linear unabhängigen Spalten von Q bilden einer $\underbrace{\text{Orthonormalbasis}}_{\text{Basis aus orthonormalen Vektoren}}$ von $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 5.4.4. : 2x2 Rotationsmatrix

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}}_{q_1} & \underbrace{\begin{matrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}}_{q_2} \end{bmatrix}$$



(Matrix der linearen Transformation "rotiere um θ gegen den Uhrzeigersinn)

R_θ ist orthogonal:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R_\theta^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R_\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permutationsmatrizen (Beispiel 5.4.5)

Eine Permutation ist eine $\underbrace{\text{bijektive}}_{\pi(i) \neq \pi(j)\ \forall i,j}$ Abbildung $\pi : \underbrace{[n]}_{\{1,2,\dots,n\}} \to [n]$

Die Permutationsmatrix zu π ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$A_{ij} = 1$ gdw. $\pi(i) = j$ und 0 sonst.

i	$\pi(i)$
1	3
2	1
3	2

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\longleftarrow A_{13} = 1$, weil $\pi(1) = 3$

Permutationsmatrizen sind orthogonal, weil die Spalten orthogonale Vektoren sind.

Challenge: Für jede Permutationsmatrix A gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $A^k = I$.

Proposition 5.4.6.: Orthogonale Matrizen erhalten Norm und Skalarprodukt, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(i) $\|Qx\| = \|x\|$

(ii) $(Qx)^T(Qy) = x^T y$.

Beweis:

(ii) $\underbrace{(Qx)^T}_{x^T Q^T}(Qy) = x^T \underbrace{Q^T Q}_{I} y = x^T y$.

(i) Wegen $\|Qx\|, \|x\| \geq 0$ reicht es zu zeigen, dass $\|Qx\|^2 = \|x\|^2$ gilt:

$$\|Qx\|^2 = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\|^2.$$

Orthonormalbasen vereinfachen die Projektion erheblich!

Prop. 5.4.7. Sei S ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$ und $q_1, q_2 \dots q_n$ eine Orthonormalbasis von S. Sei

$$Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

(i) Dann gilt für alle $b \in \mathbb{R}^m$: $\text{proj}_S(b) = Pb$, wobei $P = QQ^T$.

(ii) Die Least squares-Lösung von $Qx = b$ ist $\hat{x} = Q^T b$.

Beweis:

(i) Theorem 5.26: $P = Q\underbrace{(Q^TQ)^{-1}}_{I}Q^T = QQ^T$.

(ii) Abschnitt 5.3: $\hat{x} = \underbrace{(Q^TQ)^{-1}}_{I}Q^T b = Q^T b$.

Clicker:

- $\underbrace{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T}_{=\text{ heisst: } AB \text{ ist orthogonal}}$ ja
- $A^{-1} = A^T$ ja

  $\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1}$ ← A^{-1} orthogonal

  $= (A^{-1})^T$ ← A orthogonal
- $A = I,\ B = -I \Rightarrow \frac{1}{2}(A+B) = 0$ nein

Wenn Q quadratisch ist: $P = QQ^T = I$

D.h. $x = QQ^T x =$

$$x = Q\,(Q^T x) = Q \begin{bmatrix} q_1^T x \\ q_2^T x \\ \vdots \\ q_m^T x \end{bmatrix}$$

Linearkombination der Basisvektoren

Basisvektoren

$$x = \sum_{i=1}^{m} (q_i^T x)\, q_i$$

Spezialfall: $q_i = e_i$ (i-ter Standard-Einheitsvektor)

$$x = \sum_{i=1}^{m} (\underbrace{e_i^T x}_{x_i})\, e_i = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$$